ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ANH TÚ

TÍNH CHẤT NHÂN TỬ CỦA TỔNG LŨY THỪA CÁC SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn ii

Mở đầu 1

1 Tổng lũy thừa các số tự nhiên liên tiếp 3

1.1 Công thức tính tổng lũy thừa $P_k(n)$ 3

1.1.1 Mở đầu về tổng lũy thừa của các số tự nhiên liên tiếp 3

1.1.2 Công thức tính $P_k(n)$ 6

1.2 Tính chất nhân tử của $P_k(n)$ 12

1.2.1 Phương pháp quy nạp 12

1.2.2 Đa thức Bernoulli và tính nhân tử của $P_k(n)$ 17

2 Tổng lũy thừa các hệ số nhị thức 23

2.1 Biểu diễn đa thức của tổng lũy thừa các hệ số nhị thức 23

2.1.1 Mở đầu về tổng lũy thừa các hệ số nhị thức 23

2.1.2 Biểu diễn đa thức của tổng các tích của hệ số nhị thức 27

2.2 Định lý Faulhaber cho tổng lũy thừa các hệ số nhị thức . . . 30

2.2.1 Các hàm phản xạ 30

2.2.2 Định lý kiểu Faulhaber 33

2.2.3 Tính chất chia hết của $f_{k,m}(x)$ 35

2.3 Tổng lũy thừa nghịch đảo của các hệ số nhị thức 42

2.3.1 Trường hợp tổng quát 42

2.3.2 Tổng nghịch đảo của lũy thừa các số tam giác 45

Kết luận 48

Tài liệu tham khảo 49

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và làm luận văn tác giả luôn nhận được sự động viên, khuyến khích và tạo điều kiện giúp đỡ nhiệt tình của các cấp lãnh đạo, của các thầy giáo, cô giáo anh chị em, bạn bè đồng nghiệp và gia đình.

Với tình cảm chân thành tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới:

Khoa Toán-Tin và Phòng Đào tạo, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy, cô giáo tham gia giảng dạy cung cấp những kiến thức giúp tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Hà Trần Phương, người trực tiếp hướng dẫn khoa học đã tận tình chỉ bảo, giúp đỡ, góp ý để tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo Tuyên Quang, Ban Giám hiệu Trường Phổ thông Dân tộc Nội trú THPT tỉnh Tuyên Quang cùng với những người thân, bạn bè đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn.

Dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện luận văn này, nhưng với trình độ hạn chế cùng nhiều lý do khác, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những khiếm khuyết nhất định. Kính mong sự góp ý của các thầy cô để luận văn này được hoàn chỉnh.

Tác giả

Mở đầu

Cho k, n là các số tự nhiên $n \geqslant 1$, ta kí hiệu

$$P_k(n) = 1^k + 2^k + ... + (n-1)^k + n^k,$$

là tổng các lũy thừa bậc k của các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến n. Việc nghiên cứu công thức tính tổng và các tính chất của tổng trên đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả. Thời trẻ, khi nghiên cứu tổng này, nhà toán học Gauss đã tìm ra một công thức cho $P_1(n)$ bằng phương pháp đơn giản là thêm số hạng đầu tiên vào số hạng cuối cùng, số hạng thứ hai vào số hạng cuối cùng thứ hai và v.v.... Ông tính được

$$P_1(n) = \frac{1}{2} n (n+1).$$

Rất tiếc phương pháp đơn giản của Gauss lại không thực hiện được với tổng bình phương, lập phương, v,v.... Về sau có nhiều nhà toán học khác xây dựng các công thức tính tổng lũy thừa các số tự nhiên liên tiếp $P_k(n)$ và nghiên cứu một số tính chất của $P_k(n)$, đặc biệt tính chất nhân tử. Tức là các tác giả đã chứng minh đại lượng $n(n+1)(2n+1)$ là thừa số của $P_k(n)$ nếu k là số chẵn lớn hơn hoặc bằng 2 và đại lượng $n^2(n+1)^2$ là thừa số của $P_k(n)$ nếu k là số lẻ lớn hơn hoặc bằng 3. (xem [1], [3],...).

Năm 2013, A. S. Dzhumadil'daev và D. Yeliussizov đã nghiên cứu tổng lũy thừa các hệ số nhị thức là một mở rộng tự nhiên của tổng lũy thừa của các số tự nhiên liên tiếp. Trong bài báo đó các tác giả cũng đã chứng minh được một số tính chất của tổng lũy thừa này, đặc biệt là tính chất nhân tử giống như tính chất của tổng lũy thừa của các số tự nhiên liên tiếp.

Với mục đích trình bày lại một số kết quả nghiên cứu về tính chất nhân tử của tổng lũy thừa các số nhị thức và một trường hợp đặc biệt là tổng lũy các số tự nhiên liên tiếp, chúng tôi chọn đề tài "**Tính chất nhân tử của tổng lũy thừa các số nguyên**". Luận văn gồm hai chương:

Chương 1 : *Tổng lũy thừa các số tự nhiên liên tiếp.* Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức mở đầu về tổng lũy thừa của các số tự nhiên liên tiếp, công thức tính tổng $P_k(n)$ và giới thiệu tính chất nhấn tử của $P_k(n)$ bằng hai phương pháp: quy nạp và sử dụng tính chất của đa thức Bernoulli.

Chương 2:*Tổng lũy thừa của các hệ số nhị thức.* Trong chương này chúng tôi trình bày lại một số kết quả nghiên cứu của A. S. Dzhumadil'daev và D. Yeliussizov ([3]) về tính chất biểu diễn đa thức, tính chất nhân tử, tính chất chia hết tổng lũy thừa của các hệ số nhị thức.

Chương 1

Tổng lũy thừa các số tự nhiên liên tiếp

1.1 Công thức tính tổng lũy thừa $P_k(n)$

1.1.1 Mở đầu về tổng lũy thừa của các số tự nhiên liên tiếp

Cho k, n là các số nguyên không âm. Với $k, n \geqslant 1$, ta kí hiệu

$$P_k(n) = 1^k + 2^k + ... + (n-1)^k + n^k,$$

là tổng các lũy thừa bậc k của các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến n. Quy ước $P_k(0) = 0$ với mọi $k \geqslant 0$ và $P_0(n) = n$ với mọi $n \geqslant 0$, khi đó ta sẽ có $P_k(n)$ với k, n là các số nguyên không âm. Do $P_k(0) = 0$ và $P_0(n) = n$ với mọi k, n nên đối với tổng $P_k(n)$ ta chủ yếu chỉ quan tâm xem xét trong trường hợp $k, n \geqslant 1$.

Ta có

$$P_1(n) = 1 + 2 + ... + (n-1) + n = n + (n-1) + ... + 2 + 1,$$

nên

$$2P_1(n) = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{n \text{ lần}} = n(n+1)$$

Kéo theo

$$P_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Rất tiếc, phương pháp đơn giản và tự nhiên này lại không sử dụng được khi tính tổng bình phương, lập phương, v,v. . . .

Có nhiều cách khác nhau để tính tổng $P_k(n)$, chẳng hạn: dự đoán công thức sau đó chứng minh công thức bằng phương pháp quy nạp toán học hoặc sử dụng kỹ thuật rút gọn, trong đó kỹ thuật rút gọn là khá hữu hiệu. Kỹ thuật rút gọn có ý tưởng được xuất phát từ việc tính tổng

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1).n}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

Jakob Bernoulli đã cũng đã dùng ý tưởng này vào việc chứng minh tính phân kỳ của chuỗi điều hòa $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....$

Sử dụng kỹ thuật rút gọn trong việc tính tổng lũy thừa các số nguyên dương ta có kết quả:

Mệnh đề 1.1 ([8])**.** *Cho n, k là các số tự nhiên. Khi đó tổng lũy thừa bậc k của các số tự nhiên liên tiếp từ 0 đến n được tính truy hồi bởi công thức*

$$P_0(n) = n.$$

$$P_k(n)=\frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1}-1-\sum_{r=2}^{k+1}\binom{k+1}{r}P_{k+1-r}(n)\right). \tag{1.1}$$

Chứng minh. Hiển nhiên khi $k=0$ công thức đúng. Ta xét $k>0$, áp dụng khai triển nhị thức Newton đối với $(n+1)^{k+1}$ ta có

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=(k+1)n^k+\sum_{r=2}^{k+1}\binom{k+1}{r}n^{k+1-r}.$$

Thay thế liên tục n ở công thức trên bởi $n-1, n-2, ..., 2, 1$ và sau đó ta cộng các vế tương ứng của các đẳng thức đã có, ta sẽ thu được:

$$(n+1)^{k+1}-1=(k+1)P_k(n)+\sum_{r=2}^{k+1}\binom{k+1}{r}P_{k+1-r}(n).$$

Điều này kéo theo

$$(k+1)P_k(n)=(n+1)^{k+1}-1-\sum_{r=2}^{k+1}\binom{k+1}{r}P_{k+1-r}(n), \tag{1.2}$$

hay

$$P_k\left(n\right)=\frac{1}{k+1}\left(\left(n+1\right)^{k+1}-1-\sum_{r=2}^{k+1}\binom{k+1}{r}P_{k+1-r}\left(n\right)\right).$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Nhận xét 1.2. Thực hiện quy nạp công thức theo (1.1) ta nhận thấy $P_k\left(n\right)$ là một đa thức của n bậc $k+1$ với mọi số tự nhiên k với hệ số của lũy thừa cao nhất là $\frac{1}{k+1}$.

Ví dụ 1. Tính tổng $1^2+2^2+...+n^2$.

Theo công thức truy hồi ta có

$$\begin{aligned}3P_2(n)&=(n+1)^3-1-\sum_{r=2}^{3}\binom{3}{r}P_{3-r}(n)\\&=n^3+3n^2+3n-\binom{3}{2}P_1(n)-P_0(n).\end{aligned}$$

Từ $P_0(n)=n, P_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ta có

$$P_2\left(n\right)=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}.$$

Ví dụ 2. Tính tổng $1^3+2^3+...+n^3$.

Từ công thức truy hồi ta có

$$\begin{aligned}4P_3(n)&=(n+1)^4-1-\sum_{r=2}^{4}\binom{4}{r}P_{3-r}(n)\\&=n^4+4n^3+6n^2+4n-\binom{4}{2}P_2(n)-\binom{4}{3}P_1(n)-P_0(n).\end{aligned}$$

Từ $P_0(n)=n, P_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}; P_2(n)=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$ ta có

$$P_3\left(n\right)=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1.1.2 Công thức tính $P_k(n)$

Trong phần này chúng tôi trình bày một kết quả về việc xây dựng công thức tính tổng các lũy thừa các số tự nhiên liên tiếp $P_k(n)$.

Định lý 1.3 ([1])**.** *Cho n, k là những số nguyên dương. Khi đó*

$$P_k(n) = \sum_{s=1}^{k+1} a_s n^s, \tag{1.3}$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{k+1}, \\ a_s &= \frac{1}{s!} \sum_{j=1}^{k+1-s} (-1)^{j+1} \frac{a_{s+j}\,(s+j)!}{(j+1)!}. \end{aligned}$$

với $0 < s < k+1$.

Chứng minh. Ta có

$$P_k(n) = \sum_{s=1}^{n} s^k = 1^k + 2^k + ... + n^k; \tag{1.4}$$

$$P_k(n-1) = \sum_{s=1}^{n-1} s^k = 1^k + 2^k + ... + (n-1)^k, \tag{1.5}$$

Do đó

$$P_k(n) - P_k(n-1) = n^k.$$

Ta thấy $P_0(n) = n$ là đa thức bậc nhất; $P_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ là một đa thức bậc hai. Sử dụng công thức (1.1) ta suy ra $P_k(n)$ là một đa thức bậc $(k+1)$ với mọi số tự nhiên k. Do đó ta có thể biểu diễn $P_k(n)$ như sau:

$$P_k(n) = a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_k n^k + a_{k+1} n^{k+1},$$

trong đó $a_1, a_2, ...a_k, a_{k+1}$ là các hằng số.

Bây giờ ta tính toán các hệ số $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Ta viết a_s dưới dạng

$$a_s = f_s(k) \quad (s \in \mathbb{N},\ 0 < s \leqslant k+1).$$

Ta có

$$P_k(n) = \sum_{s=1}^{k+1} a_s n^s$$
$$P_k(n-1) = \sum_{s=1}^{k+1} a_s (n-1)^s.$$

Do đó

$$P_k(n) - P_k(n-1) = \sum_{s=1}^{k+1} a_s n^s - \sum_{s=1}^{k+1} a_s (n-1)^s = n^k.$$

Khai triển từng số hạng trong tổng trên $(n-1)^s$ ta có

$$P_k(n) - P_k(n-1) = b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + ... + b_k n^k + b_{k+1} n^{k+1} = n^k, \tag{1.6}$$

trong đó

$$b_s = f(k, a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}) \quad (0 < s \leq k+1).$$

Điều này kéo theo $b_s = 0$ $(s \neq k)$ còn $b_k = 1$. Vì $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ là hằng số nên b_s được viết dưới dạng $f(k)$, trong đó k là số tự nhiên đã biết. Ta có

$$\sum_{s=1}^{k+1} a_s n^s - \sum_{s=1}^{k+1} a_s (n-1)^s = n^k$$
$$\sum_{s=1}^{k+1} a_s n^s = a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_{k+1} n^{k+1}.$$

Ta phân tích

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k+1} a_s (n-1)^s &= a_1(n-1) + a_2(n-1)^2 + ... + a_{k+1}(n-1)^{k+1} \\ &= a_1(n-1) + a_2(n^2 + -2n + 1) + a_3(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \\ &\quad + \cdots + a_k\left(n^k - kn^{k-1} + \frac{k(k-1)n^{k-2}}{2} - \dots\right) \\ &\quad + a_{k+1}\left(n^{k+1} - (k+1)n^k + \frac{(k+1)kn^{k-1}}{2} - \dots\right).\end{aligned}$$